DIKTAT

MATEMATIKA

Semester IV T.P. 2014 / 2015

Oleh :
Nur Zakyah Muin, S.Pd

KEMENTERIAN KELAUTAN DAN PERIKANAN
BADAN PENGEMBANGAN SDM KELAUTAN DAN PERIKANAN
PUSAT PENDIDIKAN KELAUTAN DAN PERIKANAN
2015

F U N G S I

KOMPETENSI DASAR

- ✓ Mendeskripsikan perbedaan konsep relasi dan fungsi
- ✓ Menerapkan konsep fungsi linear
- ✓ Menggambar fungsi kuadrat
- ✓ Menerapkan konsep fungsi kuadrat
- ✓ Menerapkan konsep fungsi trigonometri

A. RELASI DAN FUNGSI

Dalam kehidupan sehari-hari kita sering mendengar kata relasi, seperti relasi bisnis, relasi keluarga, dll. Kata relasi tersebut dapat diartikan sebagai hubungan. Sedangkan dalam matematika, relasi dapat diartikan sebagai berikut

Relasi dari himpunan A ke himpunan B adalah suatu aturan atau hubungan yang memasangkan anggota-anggota himpunan A ke anggota-anggota himpunan B

Relasi antara dua himpunan dapat dinyatakan dengan tiga cara, yaitu :

a. Diagram panah,
b. Himpunan pasangan berurutan,
c. Diagram Cartesius.

Fungsi atau pemetaan dari himpunan A ke himpunan B adalah suatu relasi khusus yang memasangkan **setiap** anggota A dengan **tepat satu** anggota B.

Secara matematis, fungsi dari A ke B yang memetakan setiap $x \in A\ ke\ f(x) = y \in B\ oleh\ f$ dinotasikan sebagai berikut

$$f = A \to B$$
$$x \mapsto f(x) = y$$

Pada fungsi di atas, himpunan A disebut daerah asal atau domain, dinotasikan oleh D, yaitu himpunan asal semua unsure pemetaan. Himpunan B disebut daerah kawan atau kodomain dinotasikan oleh K, yaitu himpunan tujuan pemetaan. Himpunan semua peta dari himpunan A disebut range atau daerah hasil, dinotasikan oleh R. Range merupakan himpunan bagian dari kodomain. Fungsi dapat dinyatakan dengan cara yang sama dengan menyatakan relasi antara dua himpunan.

Contoh 1

Diketahui himpunan $A = \{1,2,3\}$ dan himpunan $B = \{2,4,6,8\}$. Relasi yang menghubungkan himpunan A dan himpunan B adalah “setengah dari”. Tunjukkan relasi tersebut dengan:

a. Diagram panah

b. Himpunan pasangan berurutan,

c. Diagram Cartesius

Jawab:

a. Diagram panah

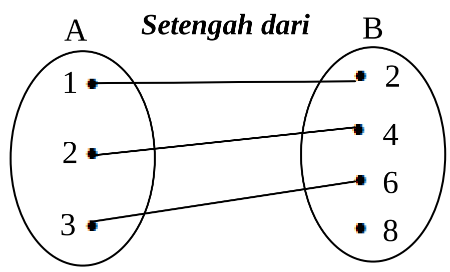
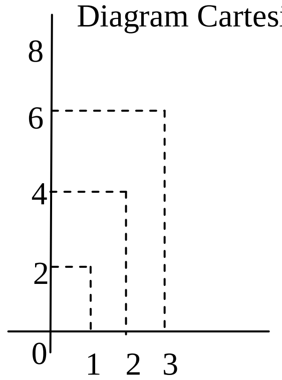


Diagram Cartesius



b. Himpunan pasangan berurutan

$\{(1,2), (2,4), (3,6)\}$

Dari penyelesaian pada contoh di atas, didapat pernyataan sebagai berikut.

- Himpunan $A = \{1,2,3\}$ adalah doamain (daerah asal atau daerah defenisi) fungsi.
- Himpunan $B = \{2,4,6,8\}$ adalah kodomain (daerah kawan)
- $\{2,4,6\}$ adalah Range (derah hasil atau daerah nilai) fungsi.
- 2 adalah bayangan atau peta dari 1; 4 adalah bayangan atau peta dari 2; 6 adalah bayangan atau peta dari 3.

Contoh 2

Suatu fungsi *f* dinotasikan dengan $f: x \mapsto 2x - 3$. Jika diketahui kodomainnya himpunan bilangan real dan daerah asalnya {-1, 0, 1, 2}, tentukan:

a. Rumus fungsi

b. Range

c. Himpunan pasangan berurutan

d. Bayangan (peta) dari 10

Jawab

$f: x \mapsto 2x - 3$

a. $f(x) = 2x - 3$

b. $f(-1) = 2(-1) - 3 = -5$

$f(0) = 2(0) - 3 = -3$

$f(1) = 2(1) - 3 = -1$

$f(2) = 2(2) - 3 = 1$

Range = {-5, -3, -1, 1}

c. Himpunan pasangan berurutan = {(-1,-5), (0,-3), (1,-1), (2,1)}

d. $f(x) = 2x - 3$

$f(10) = 2(10) - 3 = 17$

Jenis-jenis fungsi ditinjau dari sifat-sifatnya sebagai berikut:

a. Fungsi Injektif (Satu-Satu)

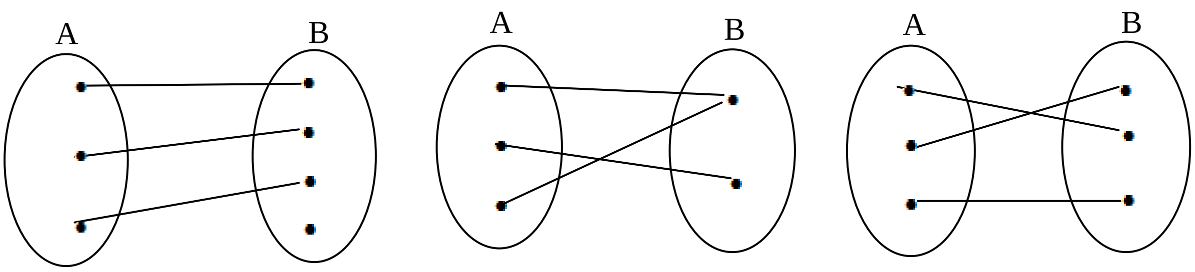
Fungsi f disebut fungsi injektif atau fungsi satu-satu bila x_1 dan x_2 anggota daerah asal, $x_1 \neq x_2$, maka $f(x_1) \neq f(x_2)$. Yang berarti jika $f(x_1) = f(x_2)$ maka $x_1 = x_2$. Atau setiap anggota himpunan domain dan kodomain hanya mempunyai satu pasangan.

b. Fungsi Surjektif (Onto)

Suatu fungsi f dari himpunan A ke himpunan b disebut fungsi surjektif bila setiap anggota B mempunyai kawan di A. Dengan kata lain, setiap anggota dari B merupakan bayangan dari elemen anggota A. Himpunan B merupakan daerah hasil atau range.

c. Fungsi Bijektif (Korespondensi Satu-Satu)

Bila suatu fungsi f dari himpunan A ke himpunan B mempunyai sifat injektif dan juga mempunyai sifat surjektif maka fungsi f disebut bijektif. Setiap dua anggota A, x_1 dan x_2 yang berbeda atau $x_1 \neq x_2$ maka kawannya juga berbeda, $f(x_1) \neq f(x_2)$. Setiap y anggota B merupakan bayangan dari tepat satu anggota A. Jadi, untuk fungsi bijektif tentu banyaknya anggota daerah asal sama dengan banyaknya anggota daerah kawan $n(A) = n(B)$



Fungsi Injektif *Fungsi Surjektif* *Fungsi Bijektif*

B. FUNGSI LINEAR

<u>Bentuk Umum Fungsi Linear</u>

Fungsi Linear memiliki variable dengan pangkat tertinggi satu. Fungsi ini memetakan setiap $x \in \boldsymbol{R}$ ke suatu bentuk $ax + b$, dengan $a \neq 0$, a dan b konstanta. Jika digambarkan, grafik fungsi linear akan berupa garis lurus.

Himpunan titik yang didapat dari fungsi $f(x) = ax + b$ membentuk grafik yang disebut grafik fungsi linear. Grafiknya berbentuk garis lurus dengan persamaan $y = mx + c$, di mana m disebut graien garis atau kemiringan garis dan c merupakan suatu konstanta.

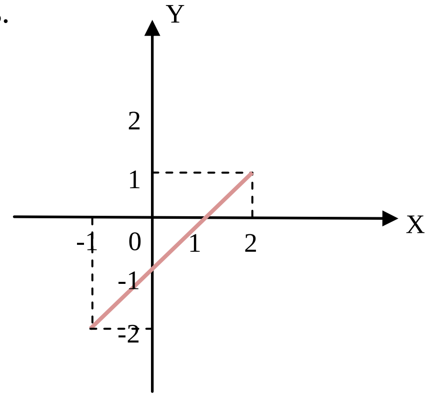
Untuk menggambar garis pada bidang Cartesius dengan persamaan $y = mx + c$ dapat dilakukan dengan menemukan paling sedikit dua titik yang memenuhi persamaan tersebut. Selanjutnya dari kedua titik tersebut dihubungkan menjadi sebuah garis.

Contoh 1

Suatu fungsi Linear ditentukan oleh $y = x - 1$ dengan daerah asal $\{x \mid -1 \leq x \leq 2, x \in \boldsymbol{R}\}$. Gambarkan titik-titik tersebut dalam diagram Cartesius.

Jawab

x	-1	0	1	**2**
$\boldsymbol{y = x - 1}$	**-2**	**-1**	**0**	**1**



<u>Gradien Persamaan Garis Lurus</u>

Gradien suatu garis adalah bilangan yang menyatakan kecondongan suatu garis yang merupakan *perbandingan* antara komponen *y* dan komponen *x*.

Gradien suatu garis yang melalui titik pusat O(0, 0) dan titik (x, y):

- Garis dengan persamaan $y = mx$ memiliki gradien m
- Garis dengan persamaan $y = mx + c$ memiliki gradien m
- Gradien garis dengan persamaan $ax + by = c$ adalah $-\frac{a}{b}$

Gradien garis yang melalui dua titik $(x_{1,} y_1)$ dan $(x_2 y_2)$:

Gradien garis yang melalui titik $(x_{1,} y_1)$ dan $(x_2 y_2)$ adalah $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Gradien garis tertentu:

- Gradien garis yang sejajar sumbu X adalah nol dan gradien garis yang sejajar sumbu Y tidak didefenisikan.
- Jika garis $y_1 = m_1 x + c$ sejajar dengan garis $y_2 = m_2 x + c$ maka gradien kedua garis tersebut sama, atau $m_1 = m_2$.
- Hasil kali gradien dua garis yang saling tegak lurus adalah -1.

<u>Contoh 2</u>

1. Tentukan gradien garis berikut:

   a. $y = x$ b. $x + 2y - 1 = 0$

2. Tentukan gradien garis $y = mx + c$, agar

   a. Sejajar dengan garis $2x - 3y = 10$

   b. Tegak lurus dengan garis $3x + 4y = 5$

Jawab

1. a. $y = x$

   $y = \underbrace{1}_{m} x \Rightarrow m = 1$

   b. $2y = -x + 1$

$$y = \underbrace{-\frac{1}{2}}_{m}x + 1 \Rightarrow m = -\frac{1}{2}$$

2. $y = mx + c \Rightarrow m = m_1$

   Sejajar dengan garis $2x - 3y = 10$

$$-3y = -2x + 10$$

$$y = \frac{2}{3}x + \frac{10}{3} \Rightarrow m_2 = \frac{2}{3}$$

   Karena garis $y = mx + c$ sejajar dengan garis $2x - 3y = 10$ maka gradiennya sama.

   $m_1 = m_2 = \frac{2}{3}$

<u>Menentukan Persamaan Garis Lurus</u>

- Persamaan Garis yang Melalui Sebuah Titik (x_1, y_1) dengan gradien m

> Persamaan garis yang melalui titik (x_1, y_1) dan bergradien m adalah $y - y_1 = m(x - x_1)$.

<u>Contoh 3</u>

Tentukan persamaan garis yang melalui titik (-2, 1) dan gradien -2

Jawab

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$\Leftrightarrow y - 1 = -2(x + 2)$

$\Leftrightarrow y - 1 = -2x - 4$

$\Leftrightarrow \quad y = -2x - 4 + 1$

$\Leftrightarrow \quad y = -2x - 3$

Jadi, persamaan garis lurus yang melalui titik (-2, 1) dengan gradien -2 adalah $y = -2x - 3$

- Persamaan Garis yang Melalui titik (x_1, y_1) dan Sejajar dengan Garis $y = mx + c$

> Persamaan garis yang melalui titik (x_1, y_1) dan sejajar garis $y = mx + c$ adalah $y - y_1 = m(x - x_1)$.

<u>Contoh 4</u>

Tentukan persamaan garis lurus yang melalui titik (2, -3) dan sejajar dengan garis $x - 2y + 3 = 0$

Jawab

$x - 2y + 3 = 0$

$\Rightarrow m_1 = -\frac{a}{b} = -\frac{1}{-2} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow m_1 = m_2$, maka $m_2 = \frac{1}{2}$

Persamaan garis yang melalui titik (2, -3) maka $x_1 = 2$ dan $y_1 = -3$

Persamaan garis lurus yang dicari melalui titik (2, -3) dan bergradien $\frac{1}{2}$ adalah

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$\Leftrightarrow y + 3 = \frac{1}{2}(x - 2)$

$\Leftrightarrow y + 3 = \frac{1}{2}x - 1$

$\Leftrightarrow \; 2y + 6 = x - 2$

$\Leftrightarrow \; x - 2y - 8 = 0$

Jadi, persamaan garis lurus yang sejajar dengan garis $x - 2y + 3 = 0$ dan melalui titik (2, -3) adalah $x - 2y - 8 = 0$

- Persamaan Garis yang Melalui titik (x_1, y_1) dan Tegak Lurus dengan Garis $y = mx + c$

> Persamaan garis yang melalui titik (x_1, y_1) dan tegak lurus dengan garis $y = mx + c$ adalah $y - y_1 = -\frac{1}{m}(x - x_1)$.

Contoh 4

Tentukan persamaan garis yang melalui titik (-3, 1) dan tegak lurus dengan garis $x + 4y + 5 = 0$

Jawab

(-3, 1) dan tegak lurus dengan garis $x + 4y + 5 = 0$

$x + 4y + 5 = 0$

$4y = -x - 5$

$y = -\frac{1}{4}x - \frac{5}{4} \Rightarrow m = -\frac{1}{4}$

Sehingga, persamaan garisnya:

$y - y_1 = -\frac{1}{m}(x - x_1)$

$y - 1 = -\frac{1}{\left(-\frac{1}{4}\right)}\left(x - (-3)\right)$

$y = 4(x + 3) + 1$

$y = 4x + 12 + 1$

$y = 4x + 13$

Jadi, persamaan garis yang tegak lurus dengan garis $x + 4y + 5 = 0$ melalui titik (-3, 1) adalah $y = 4x + 13$

Persamaan Garis yang Melalui Dua Titik Sebarang (x_1, y_1) dan $(x_2 y_2)$

Persamaan garis yang melalui titik $A(x_1, y_1)$ dan $B(x_2 y_2)$ adalah $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$. Atau dapat dituliskan $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$

Contoh 5

Tentukan persamaan garis yang melalui titik Q(-5, 0) dan R(3, 4)

Jawab

Cara I

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4 - 0}{3 + 5} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

Persamaan garisnya adalah

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$\Leftrightarrow y - 0 = \frac{1}{2}(x + 5)$

$\Leftrightarrow 2y = x + 5$

Cara II

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{y - 0}{4 - 0} = \frac{x - (-5)}{3 - (-5)}$$

$$\frac{y}{4} = \frac{x + 5}{8}$$

$$y = \frac{4(x + 5)}{8}$$

$$2y = x + 5$$

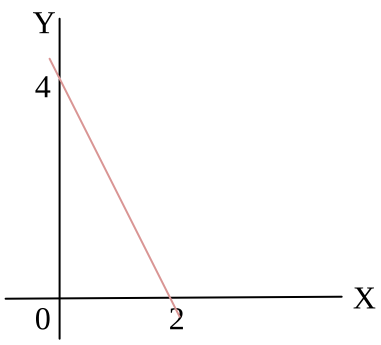
Jadi, persamaan garis yang melalui titik Q(-5, 0) dan R(3, 4) adalah $2y = x + 5$

Persamaan Garis yang Melalui Titik Potong Sumbu X dan Sumbu Y (Jika Grafiknya Diketahui)

Persamaan garis lurus yang melalui dua titik yaitu titik potong Sumbu X dititik P (a, 0) dan titik potong Sumbu Y di titik Q (0, b) dapat ditentukan dengan rumus $bx + ay = ab$

Contoh 6

Tentukan persamaan garis dari grafik fungsi berikut



Jawab

Diketahui persamaan garis lurus melalui titik (2, 0) dan titik (0, 4). Persamaan garisnya adalah:

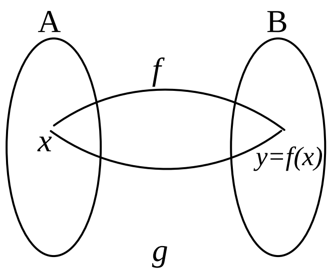
$\Leftrightarrow 4x + 2y = 4 \cdot 2$

$\Leftrightarrow 4x + 2y = 8$

$\Leftrightarrow 2x + y = 4$

Jadi, persamaan garisnya adalah $2x + y = 4$

Invers Fungsi Linear



Misal $f: A \to B$ Bayangan dari $x \in A$ karena fungsi f adalah *y=f(x)*

Fungsi $g: B \to A$ yang mengawankan setiap bayangan dari $x \in A$ karena fungsi f yaitu *y=f(x)* dengan $x \in A$ maka fungsi g disebut fungsi invers dari *f*.

Fungsi invers dari fungsi f ditulis f^{-1}

$f^{-1}: B \to A$

Bayangan dari $y \in B$ karena f^{-1} adalah $x = f^{-1}(y)$

Syarat agar invers suatu fungsi f yaitu f^{-1} juga merupakan fungsi (disebut fungsi invers), hanya jika fungsi f adalah bijektif (berada dalam korespondensi satu-satu).

Untuk menentukan rumus invers dari sebuah fungsi, dapat dilakukan dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Misalkan $y = f(x)$
2. Nyatakan *x* dalam *y* (sebagai fungsi *y*)
3. Nyatakan x sebagai $f^{-1}(y)$
4. Gantilah *y* pada $f^{-1}(y)$ dengan *x* untuk mendapatkan $f^{-1}(x)$

Contoh:

Carilah rumus invers dari fungsi-fungsi berikut.

a. $f(x) = 2x - 1$

b. $f(x) = \frac{x+5}{2x-6}$

Jawab

a. $f(x) = 2x - 1$

$\Leftrightarrow y = 2x - 1$

$\Leftrightarrow 2x = y + 1$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{y+1}{2}$

$\Leftrightarrow f^{-1}(y) = \dfrac{y+1}{2}$

$\Leftrightarrow f^{-1}(x) = \dfrac{x+1}{2}$

b. $f(x) = \frac{x+5}{2x-6}$

$\Leftrightarrow y = \dfrac{x+5}{2x-6}$

$\Leftrightarrow y(2x-6) = x + 5$

$\Leftrightarrow 2xy - 6y = x + 5$

$\Leftrightarrow 2xy - x = 6y + 5$

$\Leftrightarrow x(2y-1) = 6y + 5$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{6y+5}{2y-1}$

$\Leftrightarrow f^{-1}(y) = \dfrac{6y+5}{2y-1}$

$\Leftrightarrow f^{-1}(x) = \dfrac{6x+5}{2x-1}$

C. FUNGSI KUADRAT

Suatu fungsi dalam himpunan bilangan yang dinyatakan dengan rumus fungsi

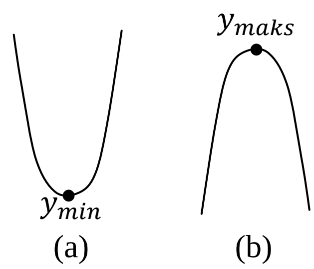
$$y = f(x) = ax^2 + bx + c$$

dengan $a, b, c \in \boldsymbol{R}\ dan\ a \neq 0$ disebut fungsi kuadrat. Untuk menggambar grafik fungsi kuadrat pada sumbu koordinat Cartesius, lambang $f(x)$ dapat diganti dengan *y* sehingga $f(x) = ax^2 + bx + c$ dapat ditulis $y = ax^2 + bx + c$ dimana x disebut variable bebas dan y disebut variable terikat.

Grafik fungsi kuadrat $f(x) = ax^2 + bx + c$ berbentuk parabolasimetris.

<u>Sifat-Sifat Grafik Fungsi Kuadrat</u>

- Berdasarkan Nilai a
  - (i) Jika $a > 0$ (positif), maka grafik atau parabola terbuka ke atas (Gambar (a)). Fungsi kuadrat memiliki nilai ekstrim minimum, dinotasikan y_{min} , atau titik balik minimum.
  - (ii) Jika $a < 0$ (negatif), maka grafik atau parabola terbuka ke bawah (Gambar (b)). Fungsi kuadrat memiliki nilai ekstrim maksimum, dinotasikan y_{maks} , atau titik balik maksimum



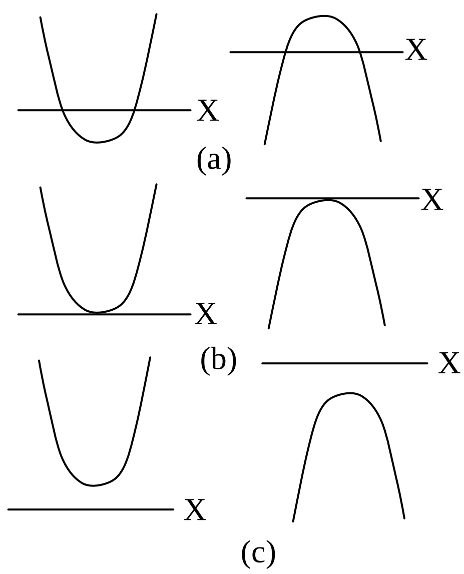
- Berdasarkan Nilai Diskriminan (D)

  Nilai Diskriminan suatu persamaan kuadrat $y = ax^2 + bx + c$ adalah sebagai berikut

$$D = b^2 - 4ac$$

Secara geometri, nilai diskriminan ini berkorespondensi dengan titik potong grafik dengan sumbu X sebagai berikut

- (i) Jika $D > 0$, maka grafik *memotong* sumbu X di dua titik yang berbeda (Gambar (a)).
- (ii) Jika $D = 0$, maka grafik *menyinggung* sumbu X di $(x, 0)$ di sebuah titik (gambar (b)).
- (iii) Jika $D < 0$, maka grafik *tidak memotong* dan *tidak menyinggung* sumbu X (Gambar (c)).



Langkah-langkah menggambar grafik fungsi kuadrat adalah sebagai berikut.

(i) Menentukan titik potong dengan sumbu X. Titik potong dengan sumbu X diperoleh jika $y = 0$ atau $ax^2 + bx + c = 0$ yaitu dengan memfaktorkan persamaan atau dengan menggunakan rumus

$$\boxed{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}}$$

(ii) Menentukan titik potong dengan sumbu Y. titik potong dengan sumbu Y diproleh jika $x = 0$, yaitu dengan mensubstitusikan $x = 0$ ke dalam fungsi kuadrat.

(iii) Menentukan sumbu simetri dan koordinat titik balik

- Persamaan sumbu simetri adalah $x = \frac{-b}{2a}$
- Koordinat titik puncak/titik balik adalah $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-D}{4a}\right)$

(iv) Menentukan beberapa titik bantu lainnya (jika diperlukan). Ambil sebarang nilai $x \in \boldsymbol{R}$ kemudian substitusikan ke persamaan fungsi kuadrat. Hubungkan titik-titik tersebut untuk mendapatkan grafik fungsi yang diinginkan.

Perhatikan contoh berikut.

Gambarkan grafik fungsi kuadrat dengan persamaan $x^2 - x + 3 = 0$.

Jawab:

$x^2 - x + 3 = 0 \Rightarrow a = 1, b = -1, c = 3$

$D = (-1)^2 - (4 \cdot 1 \cdot 3) = 1 - 12 = -11$

(i) Titik potong grafik dengan sumbu X $(y = 0)$

Karena D<0 maka, grafik tidak memotong sumbu X

(ii) Titik potong grafik dengan sumbu Y $(x = 0)$

$y = (0)^2 - (0) + 3 = 3$

Jadi, titik potong grafik dengan sumbu Y adalah titik (3, 0)

(iii) Sumbu simetri dan koordinat titik balik

$$x = \frac{-(-1)}{2(1)} = \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{-(-11)}{4(1)} = \frac{11}{4} = 2\frac{3}{4}$$

Jadi, titik puncaknya adalah $(\frac{1}{2}, 2\frac{3}{4})$ dan sumbu simetri $x = \frac{1}{2}$

(iv) Titik bantu

Untuk $x = 1 \Leftrightarrow y = (1)^2 - (1) + 3 = 3$

Titik bantu (1,3)

Menentukan Persamaan Fungsi Kuadrat Jika Diketahui Grafik Atau Unsur-Unsurnya

Persamaan Fungsi Kuadrat $f(x) = ax^2 + bx + c$ Apabila Diketahui Grafik Fungsi Melalui Tiga Titik

Contoh:

Tentukan fungsi kuadrat yang melalui titik (1, -4), (0, -3), dan (4, 5).

Jawab

$f(x) = ax^2 + bx + c$

$f(1) = a(1)^2 + b(1) + c = -4$ Substitusi x = 1dan $f(x) = y = -4$

$\Leftrightarrow \quad a + b + c = -4$ ....(1)

$f(0) = a(0)^2 + b(0) + c = -3$ Substitusi x = 0dan $f(x) = y = -3$

$\Leftrightarrow \quad 0 + 0 + c = -3$

$\Leftrightarrow \quad c = -3$…..(2)

$f(4) = a(4)^2 + b(4) + c = 5$ Substitusi x = 4dan $f(x) = y = 5$

$\Leftrightarrow \quad 16a + 4b + c = 5$.....(3)

Substitusi (2) ke (1)

$a + b - 3 = -4$

$\Leftrightarrow a + b = -1$............ (4)

Substitusi (2) ke (3)

$16a + 4b - 3 = 5$

$\Leftrightarrow 16a + 4b = 8$......... (5)

Dari (4) dan (5) diperoleh:

$$\begin{array}{r|l|r} a + b = -1 & \times 4 & 4a + 4b = -4 \\ 16a + 4b = 8 & \times 1 & 16a + 4b = 8 \\ \hline & & -12a = -12 \quad - \end{array}$$

$\Leftrightarrow \quad a = 1$

Substitusi a = 1 ke (4)

1 + b = -1

b = -2

Jadi fungsi kuadratnya adalah $f(x) = x^2 - 2x - 3$

Persamaan Fungsi Kuadrat $f(x) = ax^2 + bx + c$ Apabila Diketahui Dua Titik Potong Terhadap Sumbu X dan Satu Titik Yang Lainnya

Persamaan fungsi kuadrat $f(x) = ax^2 + bx + c$ apabila diketahui dua titik potong terhadap sumbu x dan satu titik yang lainnya dapat ditentukan dengan rumus berikut

$$\boxed{f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)}$$

Contoh:

Tentukan persamaan fungsi kuadrat yang memotong sumbu X di titik A (1, 0), B (-3, 0), dan memotong sumbu Y di titik (0, 3)

Jawab

$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

Titik (1, 0) dan (-3, 0) disubstitusikan ke $f(x)$ menjadi

$f(x) = a(x - 1)(x - 3)$ …. (1)

Kemudian substitusikan (0, 3) ke persamaan (1) menjadi

$3 = a(0 - x_1)(0 - x_2)$

$3 = -3a$

$a = -1$

Persamaan fungsi kuadratnya menjadi

$f(x) = -1(x - 1)(x - 3)$

$\quad\quad = -1(x^2 + 2x - 3)$

$f(x) = -x^2 - 2x + 3$

Jadi, fungsi kuadratnya adalah $f(x) = -x^2 - 2x + 3$

Persamaan Fungsi Kuadrat $f(x) = ax^2 + bx + c$ Apabila Diketahui Titik Puncak Grafik (x_p, y_p) dan Satu Titik Yang Lainnya

Persamaan fungsi kuadrat $\mathrm{f(x) = ax^2 + bx + c}$ apabila diketahui titik puncak grafik $(\mathrm{x_p, y_p})$ dan satu titik yang lainnya dapat ditentukan dengan rumus sebagai berikut

$$\boxed{f(x) = a(x - x_p)^2 + y_p}$$

Contoh:

Tentukan persamaan fungsi kuadrat yang titik puncaknya (-1, 9) dan melalui (3, -7).

Jawab

$f(x) = a(x - x_p)^2 + y_p$ $\quad\quad (\mathrm{x_p, y_p}) = (-1, 9)$

$f(x) = a(x + 1)^2 + 9$ …. (1)

Substitusikan titik (3, -7) ke persamaan (1) menjadi

$\quad -7 = a(3 + 1)^2 + 9$

$\Leftrightarrow -16 = 16a$

$\Leftrightarrow \quad a = -1$

Substitusikan titik $a = -1$ ke persamaan (1)

$f(x) = -1(x + 1)^2 + 9$

$\quad\quad = -1(x^2 + 2x + 1) + 9$

$\quad\quad = (-x^2 - 2x - 1) + 9$

$f(x) = -x^2 - 2x + 8$

Jadi, fungsi kuadratnya adalah $f(x) = -x^2 - 2x + 8$

Penerapan Fungsi Kuadrat

Contoh 1:

Lintasan sebuah peluru yang ditembakkan vertikal ke atas setinggi h meter dalam waktu *t* detik, dinyatakan dengan rumus $h = 40t - 5t^2$. Tentukan:

a. Waktu yang diperlukan untuk mencapai tinggi maksimum,
b. Tinggi maksimum peluru tersebut.

Jawab

$h = 40t - 5t^2$ (fungsi kuadrat dengan *a* = -5, *b* = 40, *c* = 0)

a. Tinggi maksimum h_{maks} dicapai pada $t = \frac{-b}{2a} = \frac{-40}{2(-5)} = \frac{-40}{-10} = 4$

Jadi, waktu yang diperlukan untuk mencapai tinggi maksimum adalah *t* = 4 detik.

b. $h_{maks} = \frac{-D}{4a} = \frac{-\left((40)^2-4(-5)(0)\right)}{4(-5)} = \frac{-1600}{-20} = 80$

Jadi, tinggi maksimum peluru adalah *h* = 80 meter

Contoh 2:

Panjang seutas kawat adalah 200 m. Kemudian kawat itu dibentuk menjadi persegi panjang dengan panjang *x* meter dan lebar *y* meter. Jika luas persegi panjang itu dinyatakan dengan *L*,

a. Nyatakan *L* sebagai fungsi,
b. Tentukan luas maksimum persegi panjang.

Jawab

a. Panjang kawat = keliling persegi panjang = 200 m

$$2(x+y) = 200$$
$$\Leftrightarrow \quad (x+y) = 100$$
$$\Leftrightarrow \quad y = 100 - x$$
$$Luas\ (L) = x \cdot y$$
$$\Leftrightarrow \quad L = x \cdot (100 - x)$$
$$\Leftrightarrow \quad L = -x^2 + 100x$$

b. $L = -x^2 + 100x$ Fungsi kuadrat dengan a = -1, b = 100, dan c = 0

$$L_{maks} = \frac{-D}{4a}$$
$$\Leftrightarrow L_{maks} = \frac{-\left((100)^2 - 4(-1)(0)\right)}{4(-1)}$$
$$\Leftrightarrow L_{maks} = 2.500$$

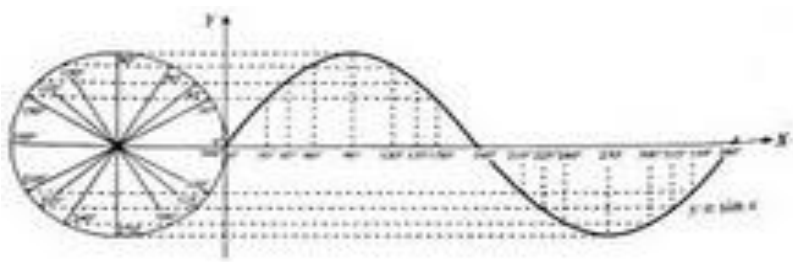
Jadi, luas maksimum persegi panjang adalah $L_{maks} = 2.500$ m^2

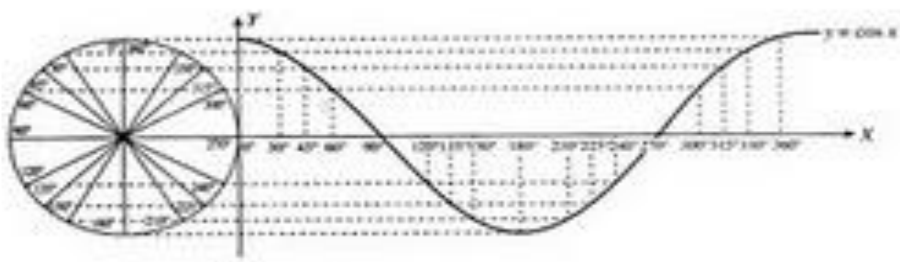
D. FUNGSI TRIGONOMETRI

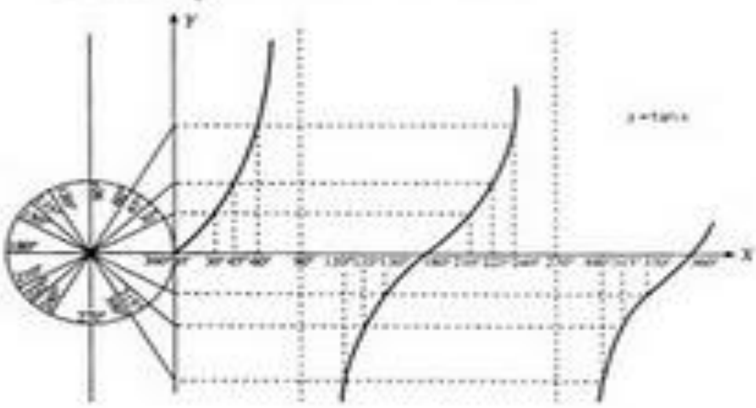
Fungsi trigonometri memetakan bilangan real x pada perbandingan trigonometrinya antara lain pada $f(x) = \sin x, f(x) = \cos x$, dan $f(x) = \tan x$. Nilai fungsi perlu dihitung untuk memudahkan dalam menggambar grafik fungsi trigonometri. Berikut ini diberikan tabel sudut-sudut istimewa.

Secara umum grafik fungsi trigonometri dapat digambar dengan menggunakan bantuan tabel maupun lingkaran satuan.

x / $f(x)$	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\cos x$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\sim$





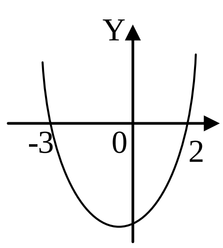


E. Latihan Mandiri

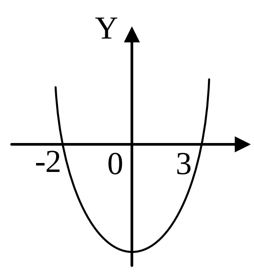
Kerjakan soal berikut secara individu sebagai tugas akhir SK 1

1. Persamaan garis yang melalui titik A(-1, 1) dan sejajar dengan garis 2x + y + 3 = 0 adalah ….
   a. 2x - y + 3 = 0
   b. 2x + y + 3 = 0
   c. 2x + y + 1 = 0
   d. x + 2y + 1 = 0
   e. x - 2y - 3 = 0
2. Persamaan garis yang melalui titik A(-2, 4) dan sejajar garis dengan persamaan 2x + y + 3 = 0 adalah ….
   a. y = 4x + 10
   b. y = 2x - 10
   c. y = -2x - 8
   d. y = x + 8
   e. y = 4x – 12
3. persamaan garis yang melalui titik A(-4, 6) dan B (2, 8) adalah ….
   a. 3y – 4x – 12 = 0
   b. 3y – x – 22 = 0
   c. x – 3y + 22 = 0
   d. 3x – y – 22 = 0
   e. 3y – 3x + 22 =
4. Fungsi kuadrat yang mempunyai titik puncak (-1, 9) dan melalui titik (3, -7) adalah …
   a. y = $x^2 + 2x + 8$
   b. y = $-x^2 - 2x + 8$
   c. y = $x^2 + 2x - 8$
   d. y = $x^2 - 2x - 8$
   e. y = $2x^2 - 8x - 19$
5. Grafik fungsi f (x) = x^2 – x – 6 adalah….

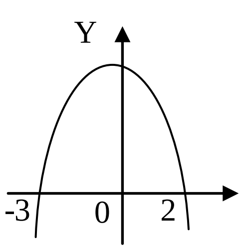
a



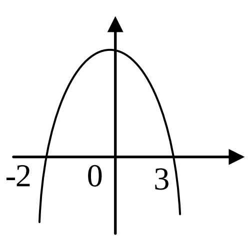
c.



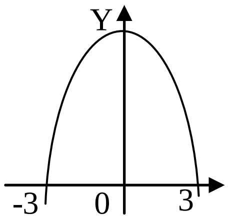
b



d



e



6. Persamaan fungsi kuadrat yang memotong sumbu X di titik (-4,0) dan (3,0) serta memotong sumbu Y di titik (0, -12), mempunyai persamaan ….
   a. $y = x^2 - x - 12$
   b. $y = x^2 + x - 12$
   c. $y = x^2 + 7x - 12$
   d. $y = x^2 - 7x - 12$
   e. $y = -x^2 - 7x - 12$
7. Persamaan fungsi kuadrat yang titik puncaknya (-4, 1) dan melalui titik (0, -15) adalah…
   a. $y = -x^2 - 8x - 15$
   b. $y = x^2 - 8x - 15$
   c. $y = x^2 + 8x + 17$
   d. $y = -x^2 + 8x + 17$
   e. $y = -x^2 + 8x + 15$

BARISAN & DERET

KOMPETENSI DASAR
- ✓ Mengidentifikasi pola, barisan dan deret bilangan
- ✓ Menerapkan konsep barisan dan deret aritmetika
- ✓ Menerapkan konsep barisan dan deret geometri

A. POLA BILANGAN, BARISAN BILANGAN DAN NOTASI SIGMA

Pola dan Barisan Bilangan

Sekumpulan bilangan yang sering ditemui kadang mengikuti pola tertentu. Pola bilangan digunakan dalam menentukan urutan atau letak suatu bilangan dari sekumpulan bilangan. Misalkan bilangan kelima dari kumpulan bilangan genap: 10, 12, 14, 16, 18, . . . adalah 18. Kumpulan bilangan tersebut membentuk sebuah barisan bilangan. **Barisan bilangan** adalah susunan anggota suatu himpunan bilangan yang diurutkan berdasarkan pola atau aturan tertentu. Anggota barisan bilangan disebut **suku** barisan yang dinyatakan sebagai berikut.

$$U_1, U_2, U_3, \dots, U_n$$

Sedangkan penjumlahan dari suku-suku suatu barisan disebut **deret**. Bentuk umum deret adalah sebagai berikut.

$$U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n$$

Menurut banyak suku-suku pembentuknya deret bilangan dibedakan menjadi deret hingga dan deret tak hingga.

Notasi Sigma

Untuk menuliskan jumlah dari suku-suku barisan bilangan dapat digunakan notasi sigma atau notasi penjumlahan sebagai berikut.

$$U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n = \sum_{k=1}^{n} U_k$$

Sifat-sifat notasi sigma

- Aturan suku konstan

$$\sum_{k=1}^{n} C = \underbrace{C + C + \cdots + C}_{n\ suku} = nC$$

- Aturan jumlah

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$$

- Aturan perkalian skalar

$$\sum_{k=1}^{n} c \cdot a_k = c \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k$$

- Aturan kelinearan

$$\sum_{k=1}^{n}(c \cdot a_k \pm d \cdot b_k) = c \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k \pm d \cdot \sum_{k=1}^{n} b_k$$

- Aturan bagian (jika 1 < *m* < *n*)

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{m} a_k + \sum_{k=m+1}^{n} a_k$$

- Aturan pengubahan indeks

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m-p}^{n-p} a_{k+p}$$

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m+p}^{n+p} a_{k-p}$$

- Aturan dominan (jika $a_k \le b_k$ untuk k = 1, 2, 3, ..., *n*)

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \le \sum_{k=1}^{n} b_k$$

- Aturan kuadrat

$$\sum^{n}(a_k + b_k)^2 = \sum^{n} {a_k}^2 + 2\sum^{n} a_k b_k + \sum^{n} {b_k}^2$$

B. BARISAN DAN DERET ARITMETIKA

Barisan Aritmetika

Jika terdapat suatu pola (aturan) tertentu antara suku-suku pada barisan, yaitu selisih antara kedua suku yang berurutan selalu tetap (konstan), maka barisan bilangan itu disebut **barisan aritmetika.**

Jika suku pertama (U_1) dinyatakan dengan *a*, selisih (beda) antara dua suku berurutan diberi notasi *b*, dan suku barisan ke-*n* dilambangkan dengan U_n, maka bentuk umum barisan aritmetika adalah sebagai berikut.

$$\boxed{U_n = a + (n-1)b}$$

Dimana $b = U_n - U_{n-1}$, dengan *b* sebuah konstanta yang tidak bergantung pada *n*.

Contoh 1:

Tentukan suku pertama, beda, rumus suku ke-*n*, dan suku ke-10 dari barisan 5, 10, 15, 20, ...

Jawab

Suku pertama (U_1) = *a* = 5

Beda (*b*) = $U_2 - U_1 = U_3 - U_2 = 5$

Rumus suku ke-n $(U_n) = a + (n-1)b$

$= 5 + (n-1)5$

$= 5 + 5n - 5$

$= 5n$

Suku ke-10 (U_{10}) $= 5(10) = 50$

Contoh 1:

Diketahui barisan aritmetika dengan suku ke-4 = 17 dan suku ke-9 = 37. Tentukan suku ke-41.

Jawab

Suku ke-4 (U_4) $= 17 \Leftrightarrow a + (4-1)b = 17$

$$a + 3b = 17 \ldots (1)$$

Suku ke-9 (U_9) $= 37 \Leftrightarrow a + (9-1)b = 37$

$$a + 8b = 37 \ldots (2)$$

Eliminasi persamaan (1) dan (2) menjadi:

$$\begin{aligned} a + 3b &= 17 \\ a + 8b &= 37 \quad - \\ \hline -5b &= -20 \\ b &= 4 \end{aligned}$$

Substitusi b = 4 ke persamaan (1) menjadi:

$$\begin{aligned} a + 3(4) &= 17 \\ a + 12 &= 17 \\ a &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_n &= a + (n-1)b \\ &= 5 + (n-1)4 \\ &= 5 + 4n - 4 \\ &= 4n + 1 \end{aligned}$$

$U_{41} = 4(41) + 1 = 165$

Jadi, suku ke-41 adalah 165

Deret Aritmetika (Deret Hitung)

Deret aritmetika adalah suatu barisan aritmetika yang suku-sukunya dijumlahkan. Apabila jumlah *n* suku barisan aritmetika yang berurutan dinyatakan sebagai S_n, maka dapat dinyatakan dengan rumus berikut.

$$S_n = \frac{1}{2}n(a + U_n)$$

atau

$$S_n = \frac{1}{2}n(2a + (n-1)b)$$

Dengan S_n : jumlah n suku pertama

U_n : suku ke-n

a : suku pertama

b : beda

n : banyak suku

Untuk setiap *n* berlaku:

$$\boxed{U_n = S_n - S_{n-1}}$$

<u>Contoh:</u>

Diketahui deret aritmetika: 2 + 5 + 8 + 11 + ... Tentukan:

a. Rumus suku ke-*n* (U_n),

b. Rumus jumlah *n* suku pertama (S_n),

c. Jumlah 20 suku pertama (S_{20})

Jawab

$a = U_1 = 2$

$b = 5 - 2 = 8 - 5 = 3$

a. $U_n = a + (n-1)b$
$= 2 + (n-1)3$
$= 3n - 1$

b. $S_n = \frac{1}{2}n(a + U_n)$

$= \frac{1}{2}n\big(2 + (3n-1)\big)$

$= \frac{1}{2}n(1 + 3n)$

$= \frac{n}{2} + \frac{3n^2}{2}$

c. $S_{20} = \frac{20}{2} + \frac{3(20)^2}{2}$

$= 10 + 600$

$= 610$

C. BARISAN DAN DERET GEOMETRI

<u>Barisan Geometri</u>

Barisan geometri adalah suatu barisan bilangan yang setiap suku berikutnya diperoleh dengan mengalikan suatu bilangan yang besarnya tetap (*r* = rasio). Apabila diketahui barisan bilangan:

$$U_1, U_2, U_3, U_4 \ \dots \ , U_n$$

Nilai *r* diperoleh dari:

$$r = \frac{U_2}{U_1} = \frac{U_3}{U_2} = \frac{U_4}{U_3} = \cdots = \frac{U_n}{U_{n-1}}$$

Dimana *r* merupakan bilangan konstan.

Bentuk umum barisan geometri dengan suku pertama *a* dan rasio *r* adalah sebagai berikut.

$$\boxed{U_n = ar^{(n-1)}}$$

Dengan, U_n : suku ke-n

a : U_1 = suku pertama

r : rasio antara dua suku yang berurutan

n : banyak suku

Contoh:

Diketahui barisan geometri: 27, 9, 3, 1, ... Tentukanlah suku pertama, rasio, rumus suku ke-*n*, dan suku ke-6.

Jawab

Suku pertama $(U_1) = a = 2$

Rasio $(r) = \frac{U_2}{U_1} = \frac{U_3}{U_2} = \frac{1}{3}$

Rumus suku ke-*n*

$$U_n = a \cdot r^{(n-1)}$$
$$= (27) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{(n-1)}$$
$$= (3^3)(3^{-1})^{(n-1)}$$
$$= 3^{3-n+1}$$
$$= 3^{4-n}$$

Suku ke-6 $(U_6) = 3^{4-6}$

$$= 3^{-2} = \frac{1}{9}$$

Deret Geometri (Deret Ukur)

Penjumlahan suku-suku dari barisan geometri yang berurutan disebut deret geometri. Seperti pada deret aritmetika, deret geometri juga dinyatakan dengan S_n.

Sehingga, untuk *r* < 1, berlaku:

$$\boxed{S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}}$$

Atau, untuk *r* > 1, berlaku:

$$\boxed{S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}}$$

Dimana, S_n : jumlah *n* suku pertama

Contoh:

Tentukanlah rasio, suku ke-10, dan jumlah 10 suku pertama dari deret geometri

3 + 6 + 12 + 24 + …

Jawab

$a = U_1 = 3$

$r = \frac{U_2}{U_1} = \frac{U_3}{U_2} = 2$ r > 1

$U_n = a \cdot r^{(n-1)}$

$U_{10} = (3) \cdot (2)^{(10-1)} = (3) \cdot (2)^9 = (3) \cdot (512) = 1.536$

$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$

$S_{10} = \frac{(3) \cdot (2^{10} - 1)}{2 - 1} = (3) \cdot (1.024 - 1) = 3.069$

Deret Geometri Tak Hingga

Deret geometri tak hingga adalah deret geometri yang banyak suku-sukunya tak hingga. Deret geometri tak hingga terdiri dari 2 jenis, yaitu konvergen dan divergen.

Jika deretgeometri tak hingga dengan -1 < r < 1, maka jumlah deret geometri tak hingga tersebut mempunyai limit jumlah (konvergen).

$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$

Untuk $n = \infty$ (tak hingga), r^n mendekati 0.

Sehingga

$$\boxed{S_\infty = \frac{a}{1 - r}}$$

Dengan S_∞ : jumlah deret geometri tak hingga

a : suku pertama

r : rasio

Jika $r \le -1$ atau $r \ge 1$, maka deret geometri tak hingganya akan divergen, yaitu jumlah suku-sukunya tidak terbatas atau tidak menuju suatu bilangan tertentu. Hal ini terjadi karena perbedaan nilai rasionya (r).

Contoh:

Hiting jumlah deret geometri tak hingga : 18 + 6 = 2 + ...

Jawab

$a = 18; r = \frac{U_2}{U_1} = \frac{U_3}{U_2} = \frac{1}{3}$

$S_\infty = \frac{a}{1 - r} = \frac{18}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{18}{\frac{2}{3}} = 27$

D. Latihan Mandiri

Kerjakan soal latihan mandiri berikut sebagai tugas akhir pada SK II

1. Rumus suku ke-n dari barisan 3, 10, 29, 66, 127, … dengan n anggota himpunan bilangan asli adalah …
   a. $n^2 + 1$
   b. $n^3 - 2$
   c. $n^2 + 3$
   d. $2n^2 - 1$
   e. $n^3 + 2$
2. Pak Faisal mempunyai 6 orang anak dengan pemberian uang saku setiap harinya membentuk deret aritmetika. Uang saku anak ke-2 Rp 8.000,00 dan anak ke-5 Rp 3.500,00. Jumlah uang saku yang dikeluarkan Pak Faisal setiap harinya adalah …
   a. Rp 30.000,00
   b. Rp 32.000,00
   c. Rp 34.500,00
   d. Rp 37.000,00
   e. Rp 39.500,00
3. Diketahui barisan bilangan geometri 5 + 7 + 12 + 23 + ….suku ke-10 dari barisan tersebut adalah ….
   a. 20
   b. 21
   c. 22
   d. 23
   e. 24
4. Jika (p + 1), (p – 2), (p – 8), membentuk barisan geometri, maka rasionya adalah ….
   a. -1
   b. $\frac{-1}{2}$
   c. $\frac{1}{2}$
   d. 1
   e. 2
5. Diketahui deret geometri dengan suku pertama adalah 6 dan suku ke-3 adalah 54. Jumlah lima suku pertama adalah …
   a. 729
   b. 726
   c. 486
   d. 480
   e. 240
6. Diketahui suatu barisan gemetri dengan a = $\frac{2}{3}$ dan r = 3. Jumlah 4 suku pertamanya adalah …
   a. $24\frac{1}{3}$
   b. $24\frac{2}{3}$
   c. $26\frac{1}{3}$
   d. $26\frac{2}{3}$

e. $36\frac{1}{3}$

7. Besar suku ke-7 dan ke-3 dari suatu barisan aritmatika 37 dan 17. Jumlah 5 suku pertama barisan tersebut adalah …
   a. 65
   b. 75
   c. 85
   d. 95
   e. 105
8. Rumus suku ke-n suatu barisan aritmatika adalah U_n = 16 – 3n, suku ke-5 barisan tersebut adalah
   a. 1
   b. 2
   c. 4
   d. 8
   e. 31
9. Jumlah deret geometri tak hingga 6 + 2 + $\frac{2}{3} + \frac{2}{9}$ + …
   a. $8\frac{8}{9}$
   b. $8\frac{26}{27}$
   c. 9
   d. 10
   e. 18
10. Rumus suku ke-n dari barisan $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}$, 1,….adalah
   a. 2^{n-1}
   b. 2^{-n}
   c. 2^{n-3}
   d. 2^n – 3
   e. 2^n + 3

RUANG DIMENSI DUA

KOMPETENSI DASAR

- ✓ Mengidentifikasi sudut
- ✓ Menentukan keliling bangun datar dan luas daerah bangun datar
- ✓ Menerapkan transformasi bangun datar

A. PENGERTIAN SUDUT

Sudut terbentuk oleh dua sinar yang saling bertemu titik pangkalnya atau dapat dikatakan bahwa sudut terbentuk oleh kemiringan suatu sinar terhadap sinar lain yang bersekutu pangkalnya. Titik persekutuannya disebut titik sudut dan dua sinar yang bersekutu merupakan sisi sudut atau kaki sudut. Besarnya suatu sudut dapat diukur menggunakan satuan sudut.

Satuan-satuan sudut yang biasa digunakan antara lain sebagai berikut.

1. Derajat

Derajat adalah satuan ukuran sudut dan dilambangkan dengan “°”. $1° = \frac{1}{360}$ putaran $= \frac{1}{360}$ keliling lingkaran. Setiap derajat dibagi dalam 60 menit dan setiap menit dibagi dalam 60 detik.

$1° = 60'$

$1' = 60''$

Jadi, $1° = 60' = 3.600''$

<u>Contoh:</u>

Nyatakan ke dalam satuan yang ditentukan.

a. $5° = \ldots' = ..''$

b. $10{,}5° = \ldots' = \ldots''$

c. $30°63' = \cdots° \ldots'$

Jawab

a. $5° = 5 \times 60' = 300'$

$= 5 \times 3.600'' = 18.000''$

b. $10{,}5° = 10° + 0{,}5 \times 60'$

$= 10°30'$

c. $30°63' = 30° + 60' + 3'$

$= 31°3'$

2. Radian

Jika θ adalah besar sudut yang dibentuk oleh dua jari-jari pada sebuah lingkaran yang menghadap busur lingkaran yang panjangnya sama dengan jari-jari lingkaran, maka besar sudut θ adalah satu radian dan ditulis 1 rad. Jika panjang busur satu lingkaran = keliling lingkaran = $2\pi r$, maka besar sudut satu putaran penuh = 2π radian.

3. Grade

Grade adalah satuan sudut yang membagi lingkaran menjadi 400 bagian yang sama. Sudut 1 putaran = 2π radian = 400^{g}

B. KONVERSI SUDUT

Dari uraian di atas terlihat adanya hubungan tiap jenis satuan sudut, sehingga kita dapat mengkonversikan satuan sudut yang satu menjadi satuan sudut yang lain menggunakan aturan sebagai berikut.

$$360° = 2\pi \text{ radian} = 400^g$$
$$1 \text{ radian} = 57{,}325° = 63{,}694^g$$
$$1° = 0{,}0174 \text{ radian} = 1{,}11^g$$
$$1^{\text{g}} = 0{,}9° = 0{,}0157 \text{ radian}$$

Contoh:

Selesaikan soal berikut.

a. Ubahlah 30° ke dalam satuan radian dan grade.

b. Ubahlah 2 radian ke dalam satuan derajat dan grade.

c. Ubahlah 100^{g} ke dalam satuan derajat dan radian.

Jawab

a. $30° = 30 \times 0{,}0174 \text{ radian} = 0{,}522 \text{ radian}$

$30° = 30 \times 1{,}11^g = 33{,}3^g$

b. $2 \text{ radian} = 2 \times 57{,}325° = 114{,}65°$

$2 \text{ radian} = 2 \times 63{,}694^g = 127{,}388^g$

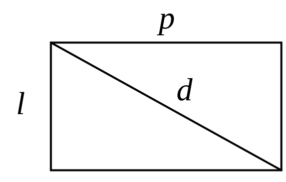
c. $100^{\text{g}} = 100 \times 0{,}9°$

$100^{\text{g}} = 100 \times 0{,}0157 \text{ radian} = 1{,}57 \text{ radian}$

C. KELILING DAN LUAS DAERAH BANGUN DATAR

1. Persegi Panjang

Sifat-sifat persegi panjang adalah sebagai berikut.



a. Setiap sisi yang berhadapan sama panjang.

b. Setiap sudutnya merupakan sudut siku-siku.

c. Mempunyai dua diagonal yang sama panjang dan berpotongan di satu titik pada bagian tengah persegi panjang. Titik tersebut membagi kedua diagonal menjadi dua bagian yang sama panjang.

d. Diagonal persegi panjang membagi persegi panjang menjadi dua segitiga siku-siku yang kongruen.

e. Persegi panjang mempunyai 2 sumbu simetri, 2 simetri lipat, dan 2 simetri putar.

Jika persegi panjang memiliki ukuran panjang = p dan lebar = l, maka luas dan kelilingnya dapat ditentukan dengan rumus berikut

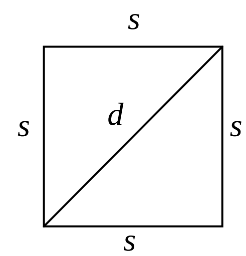
Keliling (K) = 2 (p +l)
Luas (L) = $p \times l$

Sedangkan untuk mencari panjang diagonalnya adalah dengan rumus berikut.

Diagonal: $d = \sqrt{p^2 + l^2}$

2. Persegi

Persegi panjang yang keempat sisinya mempunyai panjang yang sama disebut persegi. Persegi mempunyai sifat-sifat sebagai berikut.



a. Setiap sisinya sama panjang.

b. Setiap sudutnya merupakan sudut siku-siku.

c. Mempunyai dua diagonal yang sama panjang dan berpotongan di satu titik pada bagian tengah persegi. Titik tersebut membagi kedua diagonal menjadi dua bagian sama panjang.

d. Diagonal persegi membagi persegi menjadi dua segitiga siku-siku sama kaki yang kongruen.

e. Diagonal persegi membagi sudut persegi sama besar dan perpotongannya membentuk sudut siku-siku.

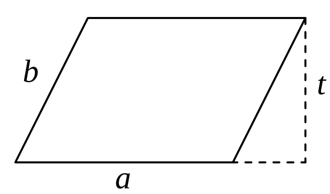
f. Persegi mempunyai empat sumbu simetri, empat simetri lipat, dan empat simetri putar.

Jika sebuah persegi sisinya adalah s, maka luas keliling, dan panjang diagonalnya dapat ditentukan dengan rumus berikut.

Keliling (K) $= 4 \cdot s$
Luas (L) = s^2
Diagonal (d) $= s\sqrt{2}$

3. Jajargenjang

Jajargenjang adalah bangun datar segi empat dengan sisi-sisi yang berhadapan sejajar dan sama panjang. Sifat-sifat jajargenjang adalah sebagai berikut.



a. Setiap sudut yang berhadapan sejajar dan sama panjang.

b. Sudut-sudut yang berhadapan sama besar.

c. Jumlah dua sudut yang berdekatan adalah 180°.

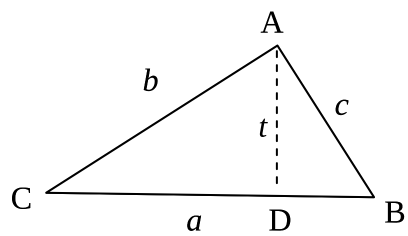
d. Jajargenjang mempunyai dua diagonal yang berpotongan di satu titik dan saling membagi dua sama panjang.
e. Jajagenjang tidak mempunyai simetri lipat, namun mempunyai dua simetri putar.

Jika sebuah jajargenjang memiliki panjang sisi-sisi a dan b dengan tinggi t, maka keliling dan luasnya dapat ditentukan dengan rumus berikut.

Keliling (K) $= 2(a+b)$
Luas (L) = $a \cdot t$

4. Segitiga

Segitiga adalah bangun datar yang mempunyai tiga sisi yang ujungnya saling bertemu dan membentuk tiga buah sudut. Jumlah ketiga sudut dalam segitiga adalah 180°. Jenis-jenis segitiga antara lain;



a. Segitiga siku-siku, merupakan segitiga yang besar salah satu sudutnya 90°.
b. Segitiga sama kaki, merupakan segitiga yang memiliki dua sisi sama panjang.
c. Segitiga sama sisi merupakan segitiga yang ketiga sisinya sama panjang.
d. Segitiga lancip, merupakan segitiga yang salah satu besar sudutnya < 90°
e. Segitiga tumpul, merupakan segitiga yang salah satu besar sudutnya > 90°

Jika segitiga memiliki sisi-sisi a, b, c dan tinggi segitiga yang tegak lurus alas a adalah t, maka luas dan kelilingnya dirumuskan sebagai berikut.

$$\text{Luas (L)} = \frac{\mathrm{a} \times \mathrm{t}}{2}$$

Atau

$$L = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

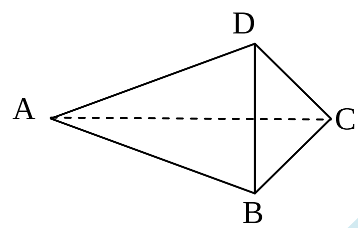
dengan $s = \frac{a+b+c}{2}$

Keliling segitiga adalah

Keliling (K) = $a + b + c$

5. Layang-Layang

Layang-layang adalah bangun datar segi empat yang kedua diagonalnya berpotongan tegak lurus dan membentuk sudut siku-siku. Sifat-sifat layang-layang adalah sebagai berikut.



a. Terdapat dua pasang sisi sama panjang yang salah satu titik pangkalnya saling bertemu.
b. Diagonalnya saling berpotongan membentuk sudut siku-siku.
c. Mempunyai satu sumbu simetri, satu simetri lipat, dan satu simetri putar.

Luas dan keliling layang-layang ABCD dirumuskan sebagai berikut.

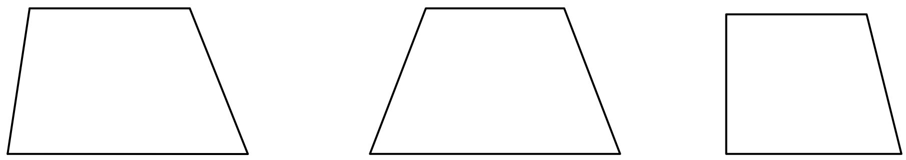
$$Luas\ (L) = \frac{1}{2} \cdot diagonal \cdot diagonal$$

dan

Keliling (K) = jumlah keempat sisinya

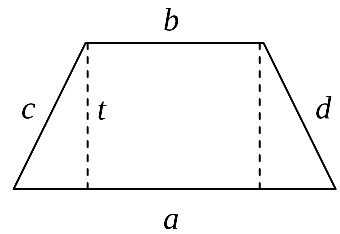
6. Trapesium

Trapesium adalah sebuah bangun datar segi empat yang mempunyai sepasang sisi yang sejajar. Ada tiga macam trapezium yaitu: trapesium sembarang **(gambar a)**, trapesium sama kaki **(gambar b)**, dan trapesium siku-siku **(gambar c)**.



(gambar a) **(gambar b)** **(gambar c)**

Jika panjang sisi-sisi sejajar sebuah trapesium adalah *a* dan *b*, panjang sisi-sisi yang lain adalah *c* dan *d*, serta tingginya *t*, maka luas dan kelilingnya adalah sebagai berikut.



$$Luas\ (L) = \frac{1}{2} \cdot (a + b) \cdot t$$

dan

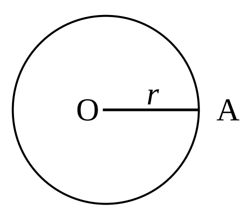
Keliling (K) = $a + b + c + d$

7. Lingkaran

Lingkaran adalah bangun datar dimana untuk setiap titik pada lingkaran itu mempunyai jarak yang sama terhadap suatu titik tertentu yang disebut pusat lingkaran. Jarak yang sama itu disebut jari-jari. Garis tengah lingkaran yang melewati titik pusat lingkaran disebut diameter. Panjang diameter adalah dua kali panjang jari-jari atau $d = 2r$. Jika sebuah lingkaran memiliki panjang jari-jari *r*, maka keliling dan luasnya dirumuskan sebagai berikut.

Keliling (*K*) = $2\pi r = \pi d$

Luas (L) $= \pi r^2 = \frac{1}{4}\pi d^2$



D. TRANSFORMASI BANGUN DATAR

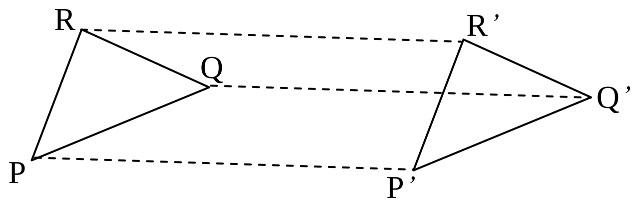
Misalkan $P(x_1, y_1)$ dan $Q(x_2, y_2)$ merupakan titik-titik pada bidang Cartesius, maka jarak PQ didefenisikan sebagai berikut

$$|PQ| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

1. Translasi (Pergeseran)

Translasi adalah suatu transformasi yang memindahkan suatu bangun datar dengan jarak dan arah tertentu atau dengan cara digeser, hasilnya berupa bangun datra yang sama dengan ukuran tetap. Sifat-sifat translasi adalah sebagai berikut.

a. Tidak mengubah bentuk dan ukuran.
b. Mengubah kedudukan dari titik, garis, atau bidang.

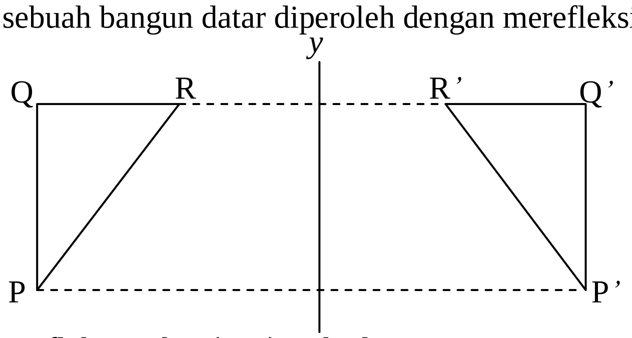


Hasil tanslasi titik $P(x, y)$ oleh translasi $T = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ adalah sebagai berikut.

$$P(x, y) \xrightarrow{T=\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}} P'(x + p, y + q)$$

2. Refleksi (Pencerminan)

Refleksi (pencerminan) adalah suatu transformasi (perpindahan) yang memindahkan titik-titik pada suatu bangun dengan menggunakan sifat bayangan cermin. Refleksi terhadap sebuah bangun datar diperoleh dengan merefleksi titik-titik pada bangun datar tersebut.



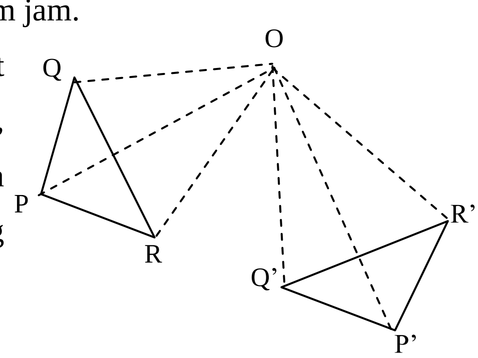
Refleksi titik $P(x, y)$ terhadap :

a. Sumbu *X* atau *y* = 0 adalah $P(x, y) \to P'(x, -y)$
b. Sumbu *Y* atau *x* = 0 adalah $P(x, y) \to P'(-x, y)$
c. Pusat *O* adalah $P(x, y) \to P'(-x, -y)$
d. Garis *x* = *h* adalah $P(x, y) \to P'(2h - x, y)$
e. Garis *y* = *k* adalah $P(x, y) \to P'(x, 2k - y)$
f. Garis *y* = *x* adalah $P(x, y) \to P'(y, x)$
g. Garis *y* = -*x* adalah $P(x, y) \to P'(-y, -x)$
h. Titik (*h*, *k*) adalah $P(x, y) \to P'(2h - x, 2k - y)$

3. Rotasi (Perputaran)

Rotasi atau perputaran ditentukan oleh pusat rotasi, besar sudut rotasi, dan arah rotasinya (perputarannya). Arah rotasi ada dua, yaitu :

1. Arah positif yang berlawanan dengan arah putaran jarum jam,
2. Arah negatif yang searah dengan arah putaran jarum jam.



Bayangan rotasi suatu titik juga dapat ditentukan dengan menggunakan matriks. Selain itu, karena rotasi berhubungan dengan sudut rotasi, maka untuk menentukan bayangan suatu titik harus dihitung dengan nilai-nilai trigonometri.

Rotasi titik $P(x, y)$ terhadap titik pusat *O*(0, 0) adalah

$P(x, y) \rightarrow P'(x \cdot \cos\theta - y \cdot \sin\theta, x \cdot \sin\theta + y \cdot \cos\theta)$

Rotasi titik $P(x, y)$ terhadap titik pusat (*h*, k) adalah

$P(x, y) \rightarrow P'(x', y')$

dengan $x' = (x \cdot \cos\theta - y \cdot \sin\theta) + (k \cdot \sin\theta - h \cdot \cos\theta + h)$

$y' = (x \cdot \sin\theta + y \cdot \cos\theta) + (k \cdot \cos\theta - h \cdot \sin\theta + k)$

4. Dilatasi

Dilatasi adalah transformasi yang mengubah ukuran tetapi tidak mengubah bentuk suatu bangun. Bayangan titik $P(x, y)$ dilatasi dengan faktor skala *k* pusat *O*(0, 0) adalah sebagai berikut.

$$P(x, y) \rightarrow P'(kx, ky)$$

Dalam bentuk perkalian matriks ditulis,

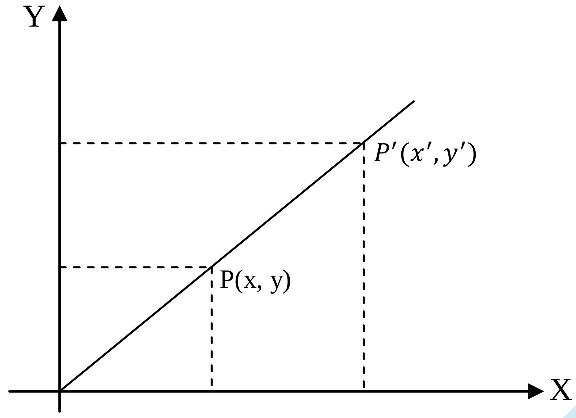
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Bayangan titik $P(x, y)$ oleh dilatasi dengan faktor skala *k* pusat (*a*, *b*) adalah sebagai berikut.

$$P(x, y) \rightarrow P'(a + k(x - a), b + k(y - b))$$

Dalam bentuk perkalian matriks di atas,

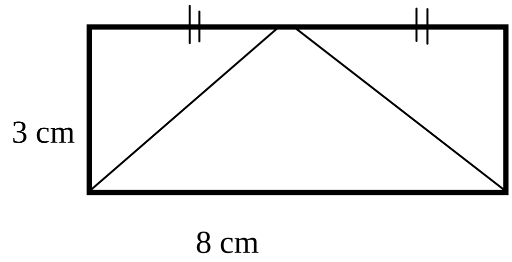
$$\begin{pmatrix} x' - a \\ y' - b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix}$$



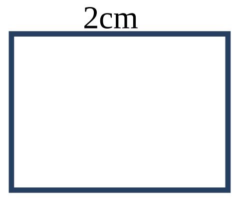
E. Latihan Mandiri

Kerjakan soal latihan berikut secara individu sebagai tugas akhir pada SK III

1. Keliling daerah yang di arsir pada gambar di bawah adalah …
   a. 7 cm
   b. 12 cm
   c. 14 cm
   d. 20 cm
   e. 24 cm

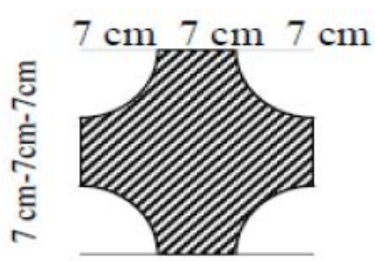


2. Luas persegi pada gambar di samping adalah …
   a. 10 cm^2
   b. 8 cm^2
   c. 6 cm^2
   d. 4 cm^2
   e. 2 cm^2



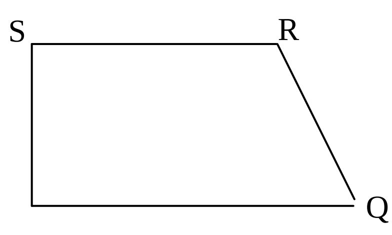
3. Diketahui 2π radian = 360°. Sudut $\frac{3}{4}\pi$ radian sama dengan …
   a. 20°
   b. 30°
   c. 45°
   d. 100°
   e. 135°

4. Suatu keeping paving berbentuk seperti pada gambar di samping. Luas permukaan kepingan paving tersebut adalah …
   a. 133 cm^2
   b. 266 cm^2
   c. 308 cm^2
   d. 287 cm^2
   e. 397 cm^2



5. Diketahui persegi PQRS dengan panjang diagonal PR = 6 cm. Luas persegi PQRS adalah …
   a. 10 cm^2
   b. 12 cm^2
   c. 18 cm^2
   d. 24 cm^2
   e. 36 cm^2

6. Trapezium PQRS siku-siku di P, PQ = 9 cm, QR 5 cm, dan RS = 6cm, keliling trapezium PQRS adalah …
   a. 18 cm
   b. 20 cm
   c. 22 cm



d. 24 cm

e. 26 cm

7. Diketahui luas suatu lingkaran adalah 314 cm^2, jika π = 3, 14 keliling lingkaran tersebut adalah …

a. 3,14 cm

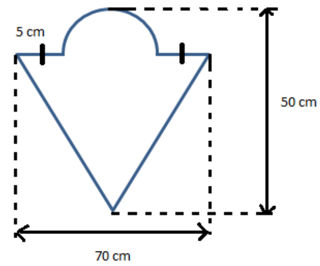
b. 31,4 cm

c. 62,8 cm

d. 628 cm

e. 942 cm

8. Sebuah hiasan dinding berbentuk seperti gambar di samping. Jika hiasan tersebut akan dilapisi dengan cat minyak, luas bangun yang akan dilapisi ….



a. 4.576 cm^2
b. 3.526 cm^2
c. 3.163 cm^2
d. 2.813 cm^2
e. 2.113 cm^2